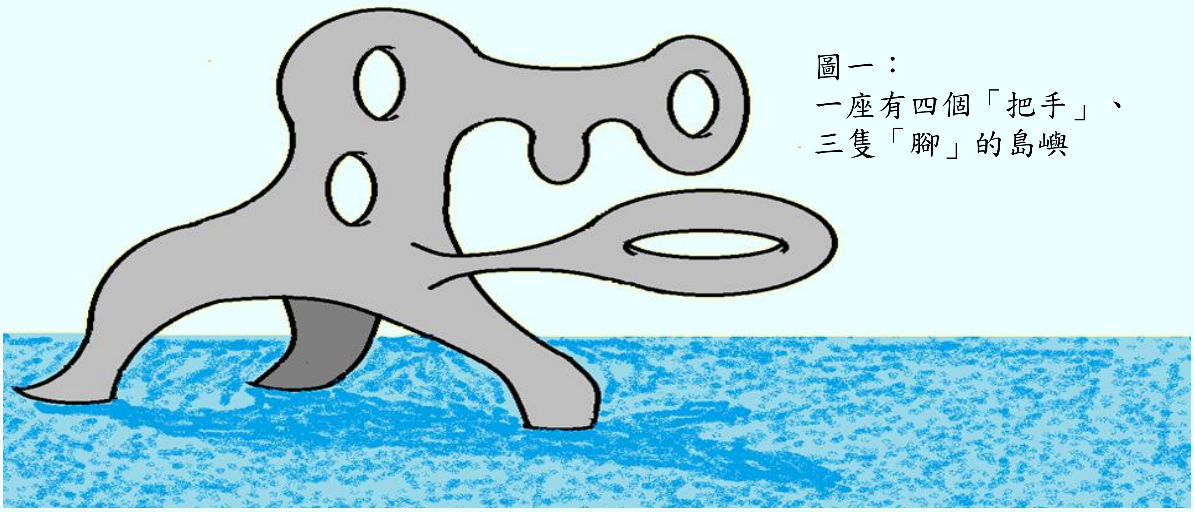
創世紀？

起初世界一片渾沌黑暗，造物主說：「要有光！」於是有了晝夜，這便是第一日。第二日，祂又造了天與海；第三日造了陸地、草木與蔬果；第四日造了日、月與星辰。第五日造了鳥、獸；第六日造了人。造了人以後誰不累呢？造物主決定第七日休息。

休息了一天，有叫數學家的人跑來亂了：「偉大的造物主啊！祢能否從海中升起島嶼…」造物主說：「像這樣？」順手升起一座如(圖一)的島嶼。

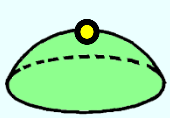


圖一：
一座有四個「把手」、三隻「腳」的島嶼

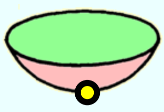
數學家：「還沒問完呢！請讓我引進一個概念！」

定義：極端(高度)點指的是以下幾種情況：

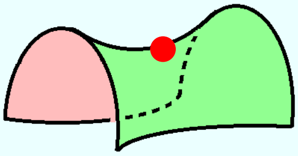
高點



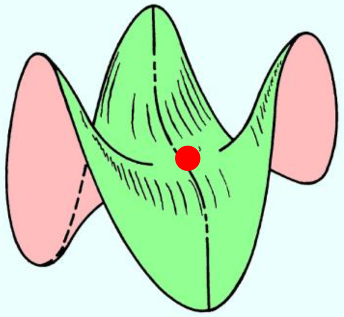
低點



1-鞍點



2-鞍點
(三上三下，
又稱猴鞍點)



類似地，還有 n-鞍點
(n+1 上 n+1 下，例如
n=4：海星鞍點、
n=7：章魚鞍點。)

數學家：「造物主啊！祢能否從海中升起島嶼，使得它有任意給定數量的把手、腳和極端點呢？」「這有何難？」造物主說完又隨手升起兩座島嶼(如下圖二)。「夠任意了吧？哈哈哈！」

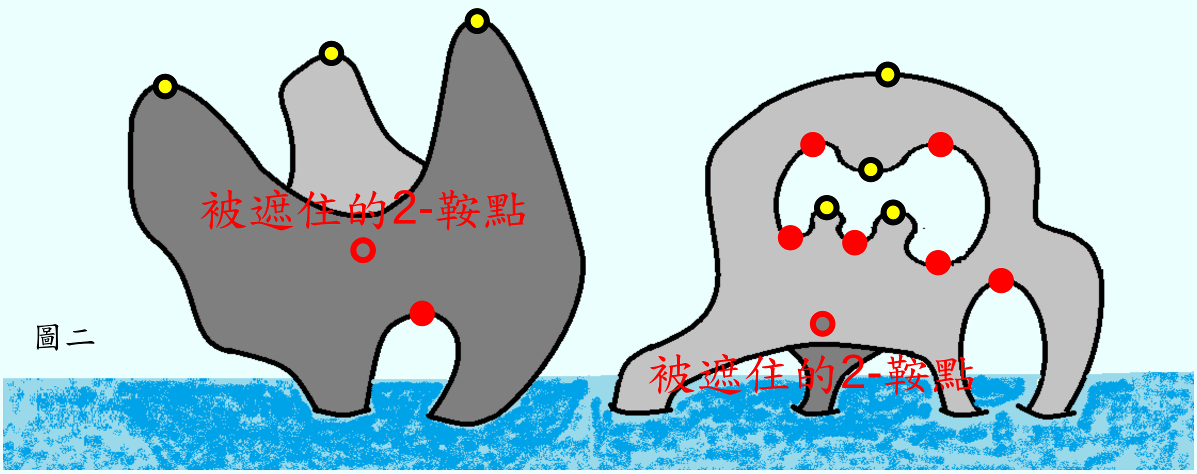
數學家：「把手、腳和極端點的個數不夠任意！」

造物主：「怎麼說？」

數學家：「(高、低點數) + 腳數+ 2(把手數) – 2一定會等於

1-鞍點數+ 2(2-鞍點數) + 3(3-鞍點數) + · · · 。」

3 + 2 – 2 = 1 + 2 x 1　　　　4 + 4 + 2 x 1 – 2 = 6 + 2 x 1

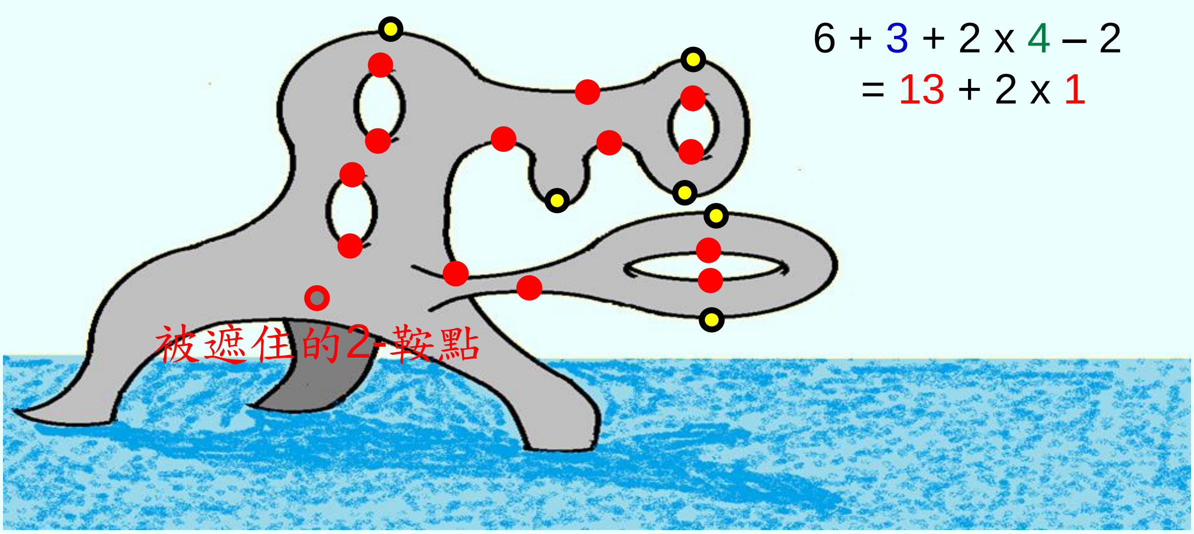


圖二

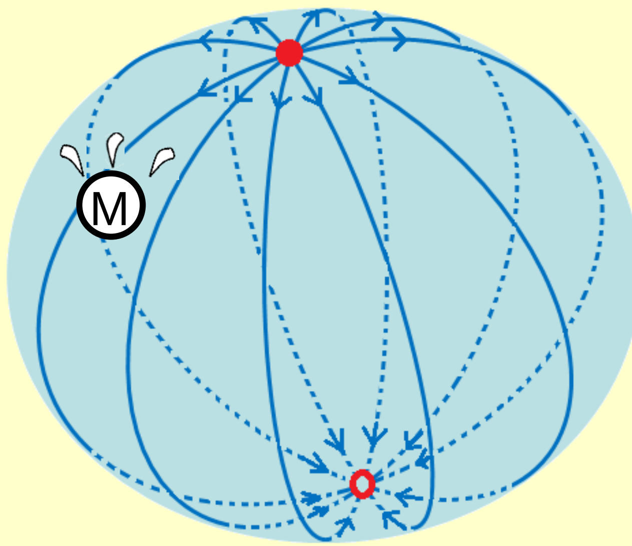
造物主：「瞎矇的吧！？」

數學家：「那祢拿以前那個鬼島試試。」

6 + 3 + 2 x 4 – 2
= 13 + 2 x 1

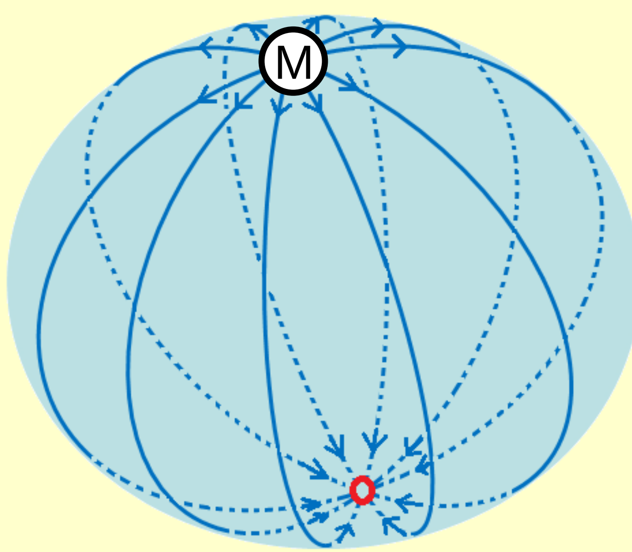


造物主嗔道：「你...你褻瀆神！」說畢隨口吹起一陣怪風，從北極沿經線到南極，吹得數學家直要往南飛去(如圖三)。



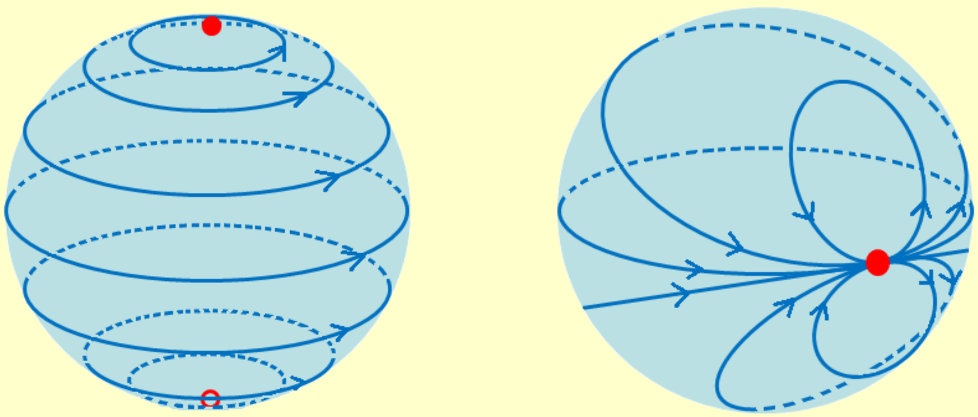
圖三：
由北極向南極吹的風

數學家回了回神，旋即站到北極說道：「祢瞧這兒沒風呢！(風不知該往何方吹)」造物主 OS 道：「你…你這刁民！」



圖四：
南、北極均為無風處

數學家：「祢得吹得沒有無風點才行！」畢竟已經上了一次當，造物主道：「等等，我先試吹兩口氣。呼！呼！為何？為何都有無風點呢？」

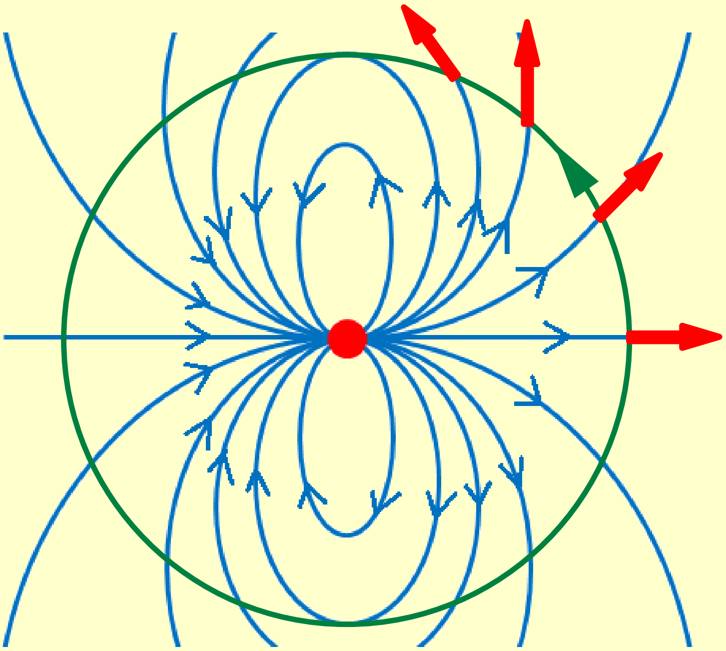


數學家：「好問題！請讓我引進一個概念！」

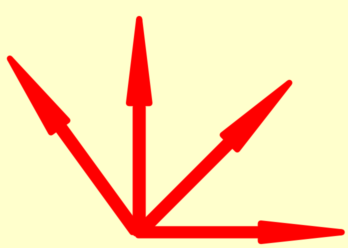
定義：一個無風點的「指標」依下列步驟計算。

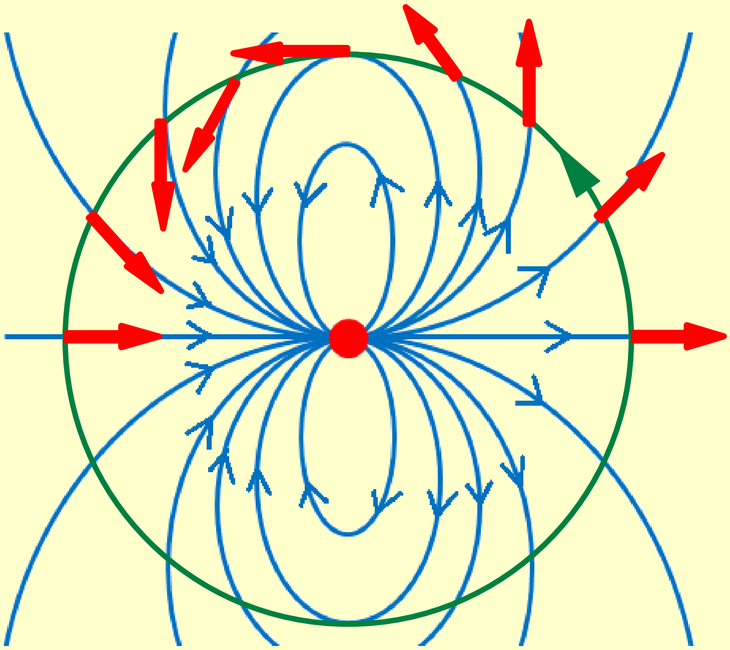
1. 將無風點附近的曲面攤平。
2. 繞無風點逆時針走一圈，邊走邊記錄風向。
3. 過程中風向逆時針轉的淨圈數便叫作此無風點的指標。

以上圖右者為例，

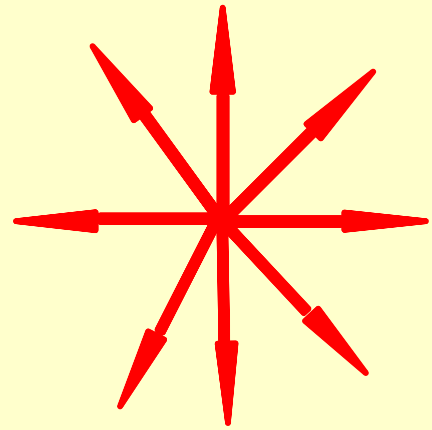


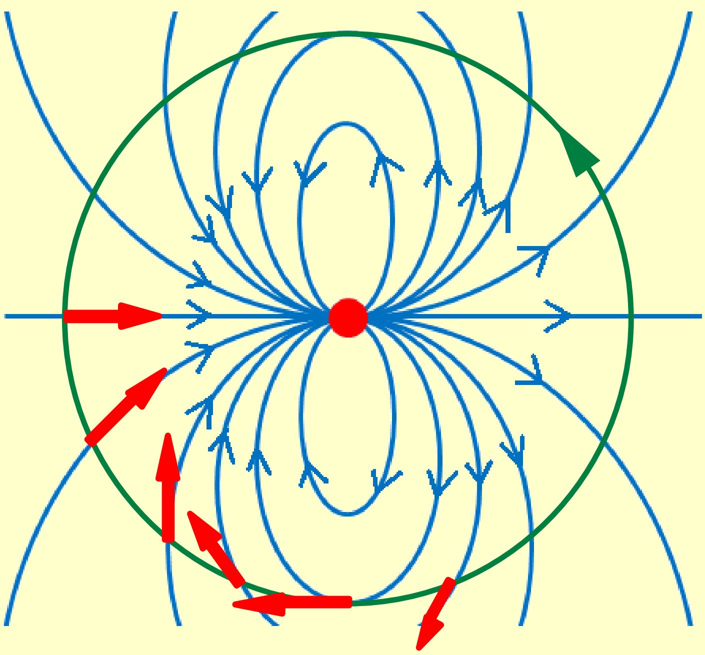
繞無風點逆時針一圈，邊走邊記錄風向。



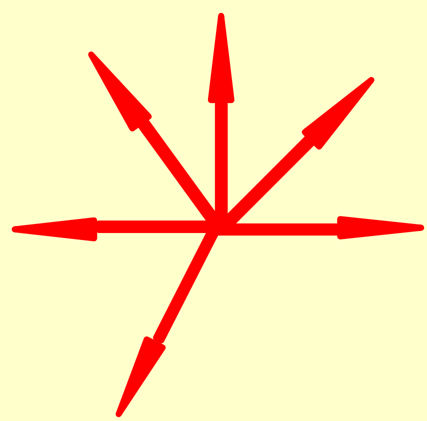


繞無風點半圈時風向已逆時針轉了一圈。





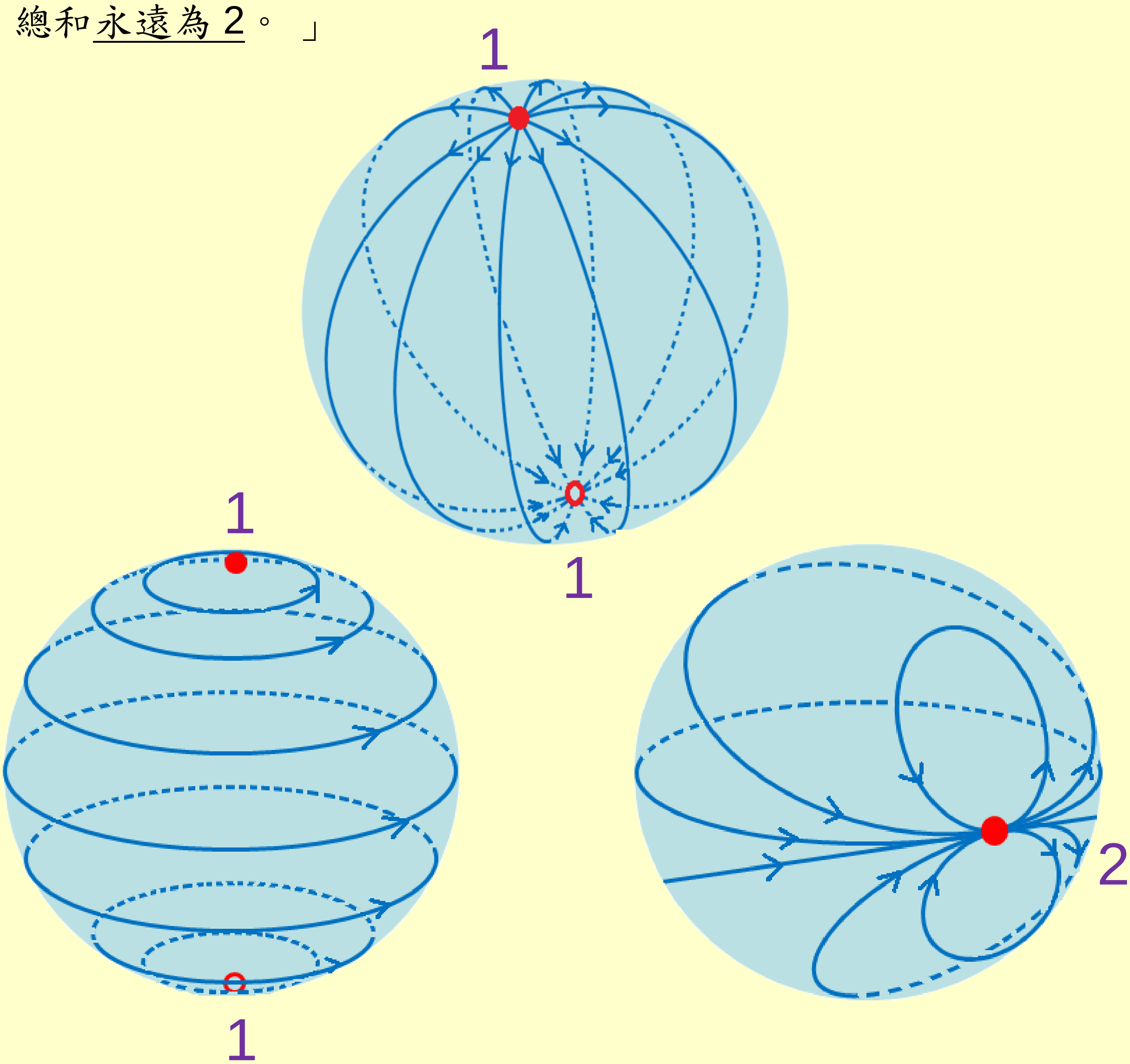
繞剩下的半圈時風向又要逆時針轉一圈。



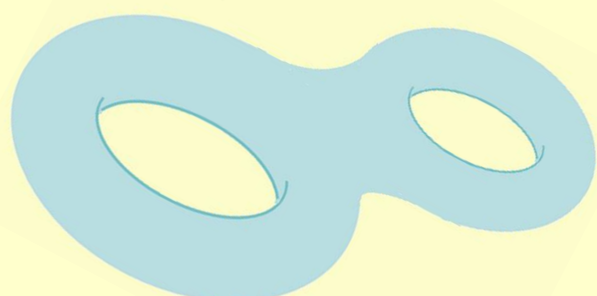
過程中風向逆時針轉了兩圈，所以我們說這個無風點的指標是 2。

注意！如果在我們逆時針繞無風點走一圈的過程中風向順時針淨轉了 n 圈，我們便說該無風點指標為 – n。

數學家：「其實，不管祢怎麼在球面上吹風，無風點的指標總和永遠為 2。 」

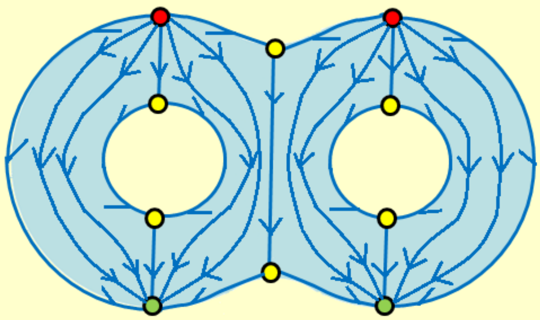


數學家：「還有更厲害的呢！不論祢怎麼吹風在有 g 個把手的封閉曲面上，無風點的指標總和永遠為 $2 - 2g$ 。比方看下面這個 $g = 2$ 的曲面。

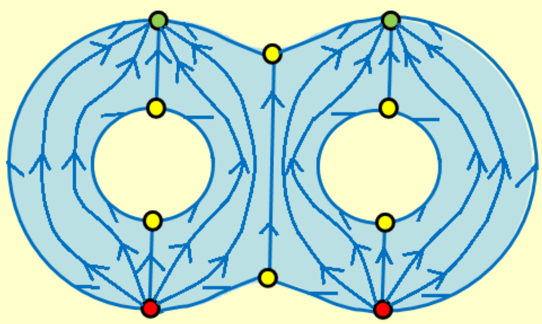


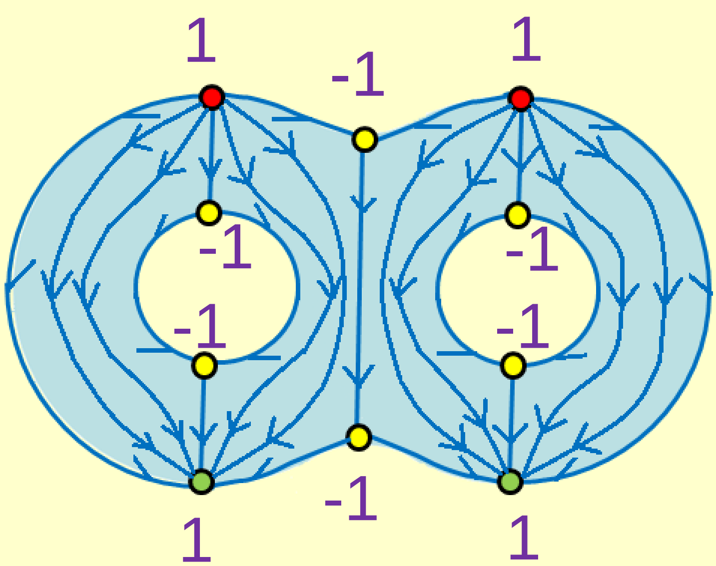
以下面這種吹法為例：

俯瞰



仰視



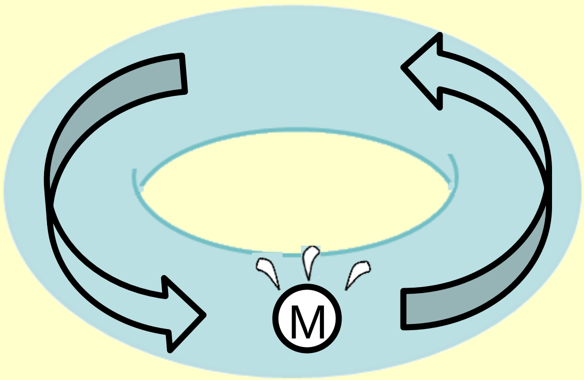


則無風點的指標和為

$4 - 6 = 2 - 2 \times 2$

數學家：「所以說，要把我吹飛，只能…」

造物主：「把你流放到朵那(donut)星！」



「真累！雖然昨天休息了，今天也休息好了。也許…前天就該休息了。」造物主喃喃道。

待續

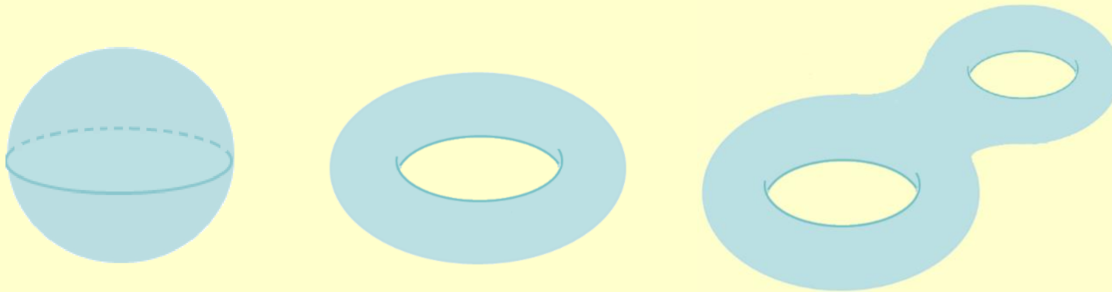
思考： (1) 上面的兩個主題有沒有關聯？

(2) 第一個主題可以說跟「高度」函數有關，換成「溫度」或「濕度」有類似結果嗎？

前面的兩個等式為何成立呢？請往下閱讀。

附錄：Euler 示性數

定義：假設Q是空間中的一個封閉曲面，如

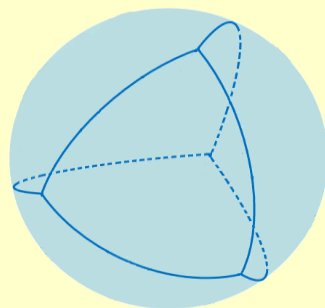


我們可以將Q剖分成若干個(彎曲的)多邊形，如球面有以下剖分：

四個彎曲三角形、

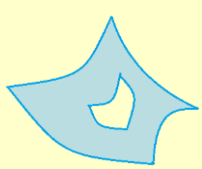
六條「稜」、

四個「頂點」。



剖分的方法必須滿足兩個基本要求：

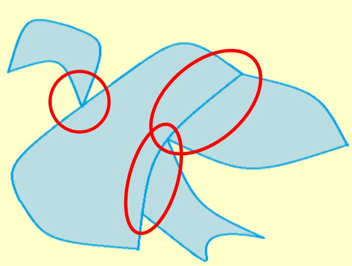
1. 每個多邊形都是簡單多邊形，也就是沒有破洞；比如說



不是允許的多邊形。

2. 任兩個多邊形相交的部分必定是它們共有的整條邊或頂點；

比如說



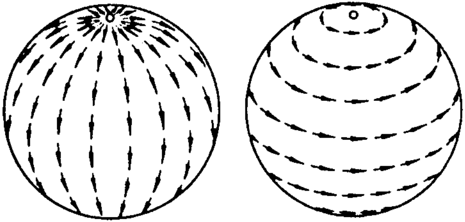
不是允許的相交方式。

一個剖分的彎曲多邊形數記為F、線條數為E、頂點數為V。
我們把 $V-E+F$ 稱作曲面 Q 的 Euler 示性數，記作 $\chi(Q)$。
例如當 Q 為球面時我們有 $\chi(Q)=4-6+4=2$。

(d)

14. 曲面上的向量場

本節中討論的問題可歸結如下。在給定的可定向的曲面 Q 上能否作出連續的方向場，即在它的每個點處取這樣的非零切向量，使在從點到點的變動下向量連續地改變？



(a) (b)

圖 87

【例28】 在球面上由北向南的方向（圖87(a)）在兩極有奇異點：在這兩個點處向量可以向着這個方向，因而連續性被破壞。關於由西向東的方向也是如此（圖87(b)）。一般地，我們以後會看到，在整個球面上不存在連續的方向場。這有時敘述成“關於刺猬的定理”

：如果從球面的每個點長“刺”（不一定切於球面的非零向量），且刺的方向從點到點連續改變，則至少有一根“刺”垂直於球面。事實上，否則把每根“刺”$\overrightarrow{aq}$ 投射到長出這根“刺”的點 a 處的切平面上（圖88），我們就得到整個球面上的連續的非零切向量場，而這不可能。

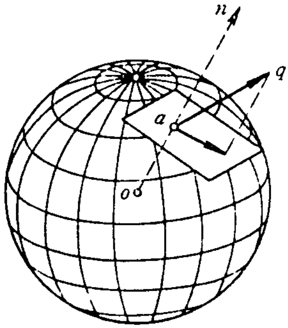
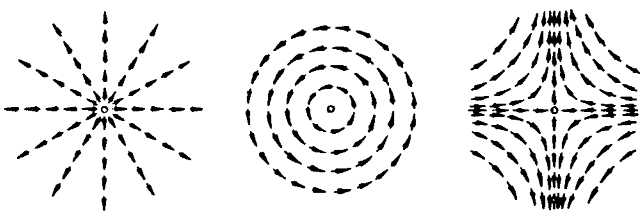


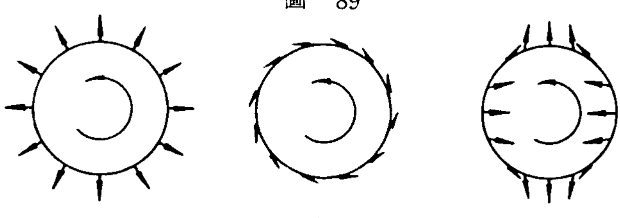
圖 88

在圖 89(a) 和 (b) 上畫着在例28裏討論的向量場在北極點鄰近的形狀，而在圖 89(c) 上畫着更複雜的奇點（所謂**鞍點**）。當我們繞奇點旋轉一周（例如反時針方向），像在圖 89(a) 和 (b) 的情形，向量的方向也向**同一個**方向轉一周（圖90(a) 和 (b)），而在圖 89(c) 的情形，則向**相反的**方向轉一周（圖90(c)）。因此就說，圖 89(a) 上（及圖 89(b) 上）的奇點有指數 $+1$，而圖 89(c) 上的奇點有指數 -1。



(a) (b) (c)

圖 89



(a) (b) (c)

圖 90

傑出的法國數學家亨利・龐加萊（1854－1912）證明了，如果在可定向的曲面Q上給定非零的切向量場，它除在有限個奇點到處連續，則全體奇點的指數之和等於$\chi(Q)$。

【例29】　因爲$\chi(P_K)=2-2k$，所以當$k\neq1$時$\chi(P_K)\neq0$。因此，在不同於環面P_1的可定向的閉曲面上不存在無奇點的連續的非零切向量場。而在環面上存在着這樣的向量場（例如可以取方向沿着緯線的向量）。

我們分兩步來引出龐加萊定理的證明：先證明對任意兩個向量場，指數和總相同。然後作出易於計算這個和數的向量場。

設在曲面Q上給定兩個只有有限個奇點的向量場。第一個場在點x處的向量記做$v_1(x)$，第二個場的向量記做$v_2(x)$。把Q剖分成小多邊形，使在每個多邊形內最多有每個場的一個奇點，且所有奇點總在多邊形的內部。

我們注意到，如果x不是場v_1的奇點，則在點x的鄰近可以轉動這個場的向量而仍保持其連續性（圖91；隨圓周半徑的增大，向量的轉動越來越小）。利用這一點，鄰近頂點處的場v_1的向量可以轉動成這樣，使在每個頂點x_0處向量$v_1(x_0)$和$v_2(x_0)$重合（圖92）。

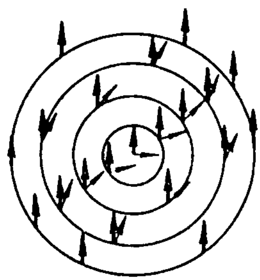


圖　91

因爲曲面Q可定向，所以在它上面可以指明計算角的正方向（例如在曲面外側指明反時針方向）。

現在我們取一條棱r_1（圖92），並在它上面取定方向（例如從頂點a到b）。我們先按這個方向從a到b移動，考察向量$v_1(x)$，再從b返回到a，考察向量$v_2(x)$。於是我們沿着棱r_1來回一次，而我們考察的向量連續改變而回到原來的位置（由於$v_1(a)=v_2(a)$和v_1

$(b)=v_2(b)$)。這個向量旋轉（按所取的計算角度的方向）的周數記做 $d(r_1)$。在圖 92 上有

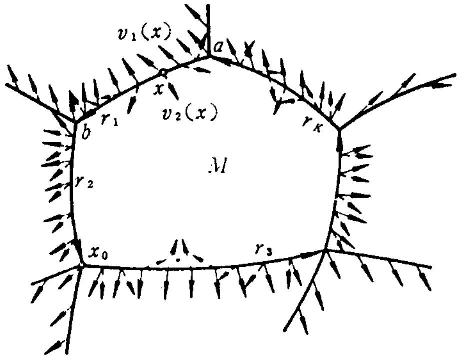


圖 92

$$d(r_1)=1,\quad d(r_2)=0,\ d(r_3)=-1.$$

我們注意到，如果棱 r_1 上取相反的方向（從 b 到 a），則 $d(r_1)$ 變號（因爲我們考察的向量按相反的方向旋轉）。

設 M 是多邊形中的一個。當我們環繞它的周線轉動時（按正方向），向量 $v_1(x)$ 轉了若干圈——我們把這個圈數記 $z_1(M)$——又向量 $v_2(x)$ 轉了 $z_2(M)$ 圈。

我們用 $r_1, r_2, \cdots, r_K$ 表示多邊形 M 的邊，並按它的周線前進的正向，規定這些邊的方向（參看圖92）。我們沿周線（從點 a 開始）向正方向前進，來考察向量 $v_1(x)$，然後（在回到 a 以後）沿周線向反方向前進，考察向量 $v_2(x)$。結果被考察的向量轉了 $z_1(M)-z_2(M)$ 圈。但是我們可以“分段”考察向量的轉動：沿棱 r_1 移動考察 $v_1(x)$，並沿棱 r_1 作相反的移動考察 $v_2(x)$；然後沿棱 r_2 移動考察 $v_1(x)$，並沿棱 r_2 作相反的移動考察 $v_2(x)$，等等。在這樣的情形下計算出圈數 $d(r_1)+d(r_2)+\cdots+d(r_K)$。因爲圈數相加不受向量在每一條棱上的旋轉角的計算順序影響，所以

$$z_1(M)-z_2(M)=d(r_1)+d(r_2)+\cdots+d(r_K). \tag{13}$$

從(13)式不難推得關係式

$$\Sigma z_1(M)=\Sigma z_2(M), \tag{14}$$

其中和號是對全體多邊形求的。事實上，等式(13)對全體多邊形求和，在右邊得到的是每條棱r出現兩次的和，因爲與它鄰接有兩個多邊形M_1和M_2(圖93)。然而按M_1周線的前進正向棱r得到一個方向，而按M_2周線的前進正向它得到相反的方向。因此，在右邊第一次出現$d(r)$，而第二次出現$-d(r)$。因爲對每條棱都是這樣，所以

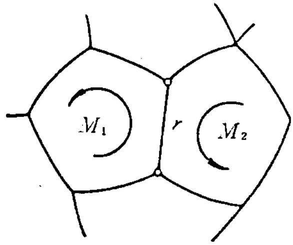


圖　93

$$\Sigma z_1(M)-\Sigma z_2(M)=0\ .$$

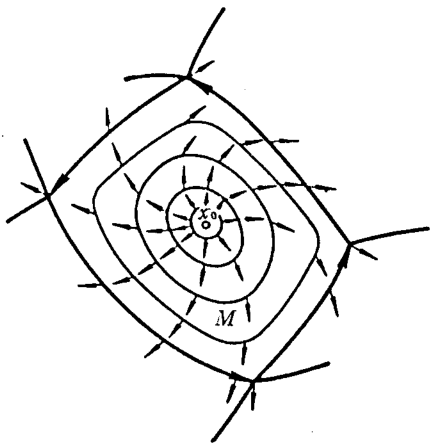


圖　94

設M是一個多邊形且x_0是場$v_1(x)$在它上面的奇點。結合多邊形M的周線與環繞點x_0的圓周作一組簡單閉曲線(圖94)。當從一條

曲線變到由它鄰近的一條時，向量 $v_1(x)$ 的旋轉圈數應改變很小。因爲場 $v_1(x)$ 是連續的。但是旋轉圈數是整數，所以不可能改變“很小”，即當從一條曲線變到另一條曲線時它保持常數。但是沿多邊形 M 的周線前進時旋轉圈數等於 $z_1(M)$，而沿繞點 x_0 的圓周前進時得到的是這個點的指數。因此，數 $z_1(M)$ 等於奇點 x_0 的指數（如果在 M 內部沒有奇點，則 $z_1(M)=0$）。由此可知，數 $\Sigma z_1(M)$ 等於場 $v_1(x)$ 的全體奇點的指數之和。同理，數 $\Sigma z_2(M)$ 等於場 $v_2(x)$ 的指數之和。由此根據（14）式得出，兩個場的指數和相等。這完成了第一步。

現在在每個多邊形內部取“中心”，而在每條棱取“中點”，並作出如圖95上所畫的向量場：沿各條棱向量的方向從頂點向着“中點”，在頂點處向量指向外，而對多邊形的“中心”向量是指向它的。這個場在曲面 Q 上的奇點是頂點，“中點”和“中心”。這時（圖96）每個奇點的指數在頂點和“中心”等於1，而在棱的“中點”等於－1（鞍點）。因此，對於這個場（因而也對於任意的場）全體奇點的指數之和等於

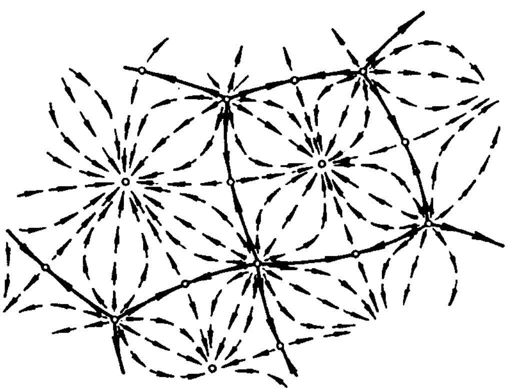
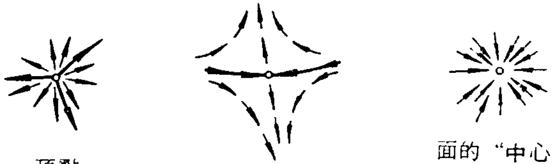


圖 95



頂點　稜的“中點”　面的“中心”

圖　96

$$V\cdot(+1)+E\cdot(-1)+F\cdot(+1)=\chi(Q).$$

習　題

92. 證明，在每一個閉曲面上存在有唯一奇點的向量場。

93. 證明，在每一個有邊緣的曲面上存在沒有奇點的向量場（在邊緣點處向量的方向應該與曲面相切，但可以不與邊緣相切）。

94. 證明，龐加萊定理對有邊緣的可定向曲面也成立，如果在每個邊緣點處向量的方向與這個邊緣相切。

95. 證明勃勞威爾定理：如果 $f:K\to K$ 是從圓盤 K 到自身的任意的連續映射，則存在（至少一個）不動點，即這樣的點 $x\in K$，它在映射 f 下變成自己：$f(x)=x$。

提示：如果沒有不動點，則作出從每個點 x 到點 $f(x)$ 的向量，就得到沒有奇點的非零連續向量場。